ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 476, № 1, с. 35–38

МЕХАНИКА

УДК 531.44

О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ НА ШЕРОХОВАТУЮ ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ ПЛОСКОСТЬ ТРЕМЯ ТОЧКАМИ

© 2017 г. Г. М. Розенблат

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлевым 21.04.2017 г.

Поступило 05.05.2017 г.

Рассматривается задача о движении тяжёлого твёрдого тела, опирающегося на шероховатую горизонтальную плоскость тремя своими точками ("тренога" [1]). Контакты в точках опоры предполагаются односторонними и подчиняются законам сухого трения. Изучается динамика возможных движений такого тела под действием сил тяжести и сухого трения.

DOI: 10.7868/S0869565217250089

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ, ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим твёрдое тело, опирающееся своими точками A_k, $k = 1, 2, 3$, на шероховатую горизонтальную плоскость π. Будем считать, что при движении в поле силы тяжести тело не отрывается от опорной плоскости π, т.е. совершает плоско-параллельное движение. Введем систему координат $Oxyz$, жёстко связанную с твёрдым телом, причем точка O – центр масс тела, ось Oz направлена вертикально вверх, а плоскость Oxy параллельна опорной плоскости π. Везде далее, если не оговорено иное, индекс k принимает значения 1, 2 или 3. Пусть $r_k = OA_k$ – радиус-вектор опорной точки A_k: $r_k = (x_k, y_k, -h)^T$, где h – высота возвышения центра масс O тела над опорной плоскостью π. Обозначим v, ω соответственно векторы скоростей центра масс O и угловой скорости тела. В силу предполагаемого плоско-параллельного движения тела получим $v = (v_x, v_y, 0)^T$, $\omega = (0, 0, \omega)^T$. В опорной точке A_k реализуется сила реакции $R_k = N_k + F_k$, где $N_k = (0,0,N_k)^T$ – нормальная реакция, причём $N_k > 0$, $F_k = (F_{kx}, F_{ky}, 0)^T$ – касательная реакция (сила трения) опорной плоскости, подчиняющаяся соотношениям закона сухого трения:

$$F_k = -fN_k v_k / |v_k|, \quad v_k \neq 0,$$
$$|F_k| \leq fN_k, \; v_k = 0, \quad v_k = v + [\omega \times r_k]. \qquad (1)$$

В (1) f – коэффициент сухого трения, v_k – скорость опорной точки A_k. Если $v_k = 0$, то направление силы F_k является неопределённым (сила трения покоя). Проекции скорости v_k точки A_k на оси системы $Oxyz$ таковы:

$$v_{kx} = v_x - \omega y_k, \quad v_{ky} = v_y + \omega x_k,$$
$$v_{kz} = 0, \quad |v_k| = (v_{kx}^2 + v_{ky}^2)^{1/2}. \qquad (2)$$

Пусть масса тела $m = 1$. Используя (1), (2), запишем уравнения теоремы о движении центра масс O тела в системе $Oxyz$:

$$v_x^{\bullet} - \omega v_y = -f\sum N_k (v_x - \omega y_k)/|v_k|,$$
$$v_y^{\bullet} + \omega v_x = -f\sum N_k (v_y + \omega x_k)/|v_k|, \; g = \sum N_k, \qquad (3)$$

где $|v_k|$ задаётся формулой из (2), причем $|v_k| \neq 0$ (случаи $v_k = 0$ должны быть рассмотрены отдельно). Пусть ось Oz является главной осью инерции тела. Тогда $J_{xz} = J_{yz} = 0$, где J_{xz}, J_{yz} – центробежные моменты инерции тела в системе координат $Oxyz$. Используя (1), (2), запишем в осях $Oxyz$ уравнения теоремы об изменении кинетического момента тела относительно его центра масс O:

$$0 = \sum N_k \left[y_k - fh(v_y + \omega x_k)/|v_k| \right],$$
$$0 = \sum N_k \left[x_k - fh(v_x - \omega y_k)/|v_k| \right], \qquad (4)$$
$$J\omega^{\bullet} = -f\sum N_k [(x_k v_y - y_k v_x) + \omega(x_k^2 + y_k^2)]/|v_k|,$$

где v_k задаётся формулой из (2), $J = J_{zz}$ – осевой момент инерции тела относительно вертикальной оси Oz в системе координат $Oxyz$.

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)
E-mail: gr51@mail.ru

Пусть опорные точки в системе $Oxyz$ имеют следующие координаты

$$x_k = q_k \cos\alpha_k, \quad y_k = q_k \sin\alpha_k, \quad z_k = -h,$$
$$q_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} > 0, \quad \alpha_k \in [0, 2\pi]. \tag{5}$$

Пусть α – угол, образуемый вектором скорости v центра масс O тела с положительным направлением оси Ox подвижной системы $Oxyz$ и отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси Oz. Имеем соотношения

$$v_x = v\cos\alpha, \quad v_y = v\sin\alpha,$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} > 0, \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \tag{6}$$

Предполагая $\omega \neq 0$, введём переменную $\rho = v/\omega$ – расстояние от проекции центра масс на опорную плоскость до мгновенного центра скоростей опорного треугольника $A_1A_2A_3$. Используя переменные (ρ,α) и (5), (6), запишем шесть уравнений движения (3), (4) в виде

$$\omega\dot\rho = -k_0 \sum N_k s_k^{-1}\left[(J - q_k^2)\rho - (J - \rho^2)q_k \sin\beta_k\right],$$
$$\omega\rho\dot\alpha = -\omega^2\rho - f\sum N_k s_k^{-1} q_k \cos\beta_k,$$
$$\dot\omega = -k_0 \sum N_k s_k^{-1}(q_k^2 - \rho q_k \sin\beta_k), \tag{7}$$
$$\sum N_k \left[q_k \cos\beta_k - \varepsilon s_k^{-1}(\rho - q_k \sin\beta_k)\right] = 0,$$
$$\sum N_k \left(q_k \sin\beta_k - \varepsilon s_k^{-1} q_k \cos\beta_k\right) = 0, \ \sum N_k = g,$$

где обозначено $s_k = \sqrt{\rho^2 + q_k^2 - 2\rho q_k \sin\beta_k}$, $\beta_k = \alpha_k - \alpha$, $k_0 = f/J$, $\varepsilon = fh$. Уравнения (7) справедливы вплоть до того момента, пока МЦС треугольника $A_1A_2A_3$ не совпадает ни с одной из опорных точек. Далее будем предполагать, что $v(0) = v_0 \neq 0$. Это эквивалентно условию $\rho(0) = \rho_0 \neq 0$. Будем рассматривать только те решения системы (7), которые реализуются при скольжении всех трёх точек опоры (с положительными нормальными реакциями) вплоть до того момента, когда $\omega = 0$. Как показано ниже, в этом случае должно быть также и $v = 0$, что соответствует полной остановке тела.

Введём безразмерное время τ при помощи соотношения $\tau = \ln(\omega_0/\omega)$. Тогда $\omega = \omega_0 \exp(-\tau)$ и $\lim\limits_{\tau\to\infty} \omega(\tau) = 0$. Таким образом, в новом времени остановка тела реализуется, когда $\tau = +\infty$. Первые три дифференциальных уравнения системы (7) в новом времени сводятся к следующим двум:

$$\rho'_\tau = D^{-1}\sum N_k s_k^{-1}\left[\left(J - \rho^2\right)q_k \sin\beta_k - \left(J - q_k^2\right)\rho\right],$$
$$\alpha'_\tau = -D^{-1}\left[\delta(\tau) + J\rho^{-1}\sum N_k s_k^{-1} q_k \cos\beta_k\right], \tag{8}$$

где

$$D = \sum N_k s_k^{-1}(q_k^2 - \rho q_k \sin\beta_k),$$
$$\delta(\tau) = k_0^{-1}\omega_0^2 e^{-2\tau}, \ \tau \in [0, +\infty).$$

Система (8) является неавтономной системой второго порядка (правая часть второго уравнения зависит от “времени” τ через функцию $\delta(\tau)$). Эта зависимость экспоненциально затухает, когда $\tau \to +\infty$. Поэтому для больших значений τ решения системы (8) близки к решениям соответствующей автономной системы второго порядка

$$\rho'_\tau = D^{-1}\sum N_k s_k^{-1}\left[(J - \rho^2)q_k \sin\beta_k - (J - q_k^2)\rho\right],$$
$$\alpha'_\tau = -D^{-1}J\rho^{-1}\sum N_k s_k^{-1} q_k \cos\beta_k. \tag{9}$$

Итак, изучение предельных движений тела сводится к поиску особых точек системы (9) и исследованию их устойчивости с использованием теоремы Пуанкаре.

Замечание. Контакты в опорах рассматриваемой модели точечные, а используемая модель трения является кулоновской. На самом деле, контакты являются некоторыми малыми площадками и необходимо использовать более реальные модели распределённого сухого трения (например, модель Контенсу–Журавлёва [2, 3]), которые позволяют учитывать также и способы закрепления площадок контакта на теле.

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ $h = 0$

Пусть $h = 0$ (тело типа пластины), опорный треугольник $A_1A_2A_3$ является равносторонним, а проекция центра масс O тела на опорную плоскость (которая в данном случае совпадает с самим центром масс тела) лежит в центре этого треугольника. Пусть ось Ox проходит через точку A_1. Получим $q_k = q$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2\pi/3$, $\alpha_3 = 4\pi/3$. Тогда три последних уравнения системы (7) имеют вид

$$\sum N_k \cos\beta_k = 0,$$
$$\sum N_k \sin\beta_k = 0, \ \sum N_k = g.$$

Отсюда следует, что $N_k = g/3$. Отметим, что эти же нормальные реакции реализуются в опорах и в том случае, когда тело находится в равновесии (состоянии покоя). Система (9) приобретает вид

$$\rho'_\tau = -D^{-1}\sum s_k^{-1}\left[(J - q^2)\rho - (J - \rho^2)q\sin\beta_k\right],$$
$$\alpha'_\tau = -D^{-1}Jq\rho^{-1}\sum s_k^{-1}\cos\beta_k. \quad (10)$$

В системе (10) имеем

$$D = q\sum s_k^{-1}(q - \rho\sin\beta_k),$$
$$\beta_1 = -\alpha, \quad \beta_2 = 120° - \alpha,$$
$$\beta_3 = 240^0 - \alpha, \quad (11)$$
$$s_k = \sqrt{\rho^2 + q^2 - 2\rho q\sin\beta_k}.$$

Предполагаем $D \neq 0$ в (10) на всём интервале движения, т.е. угловая скорость тела в силу третьего уравнения системы (7) монотонно убывает. Тогда особые точки системы (10) являются решениями системы уравнений

$$\sum s_k^{-1}\left[(J - q^2)\rho - (J - \rho^2)q\sin\beta_k\right] = 0,$$
$$\rho^{-1}\sum s_k^{-1}\cos\beta_k = 0. \quad (12)$$

Справедливы утверждения (доказательства утверждений опущены из-за их громоздкости).

Утверждение 1. *Система* (10) *имеет следующие четыре типа особых точек (решений)*:

1) $q^2 \notin [J/2, 2J]$: *имеются три особые точки вида* $(\rho_{01}, \alpha_{01k})$, $k = 1, 2, 3$:

$$\rho_{01} = J(J - 2q^2)\left[q(2J - q^2)\right]^{-1} > 0,$$
$$\alpha_{011} = -90°, \quad \alpha_{012} = 120° - 90°,$$
$$\alpha_{013} = 240° - 90°;$$

2) $q^2 \in (J/2, 2J)$: : *имеются три особые точки вида* $(\rho_{02}, \alpha_{02k})$, $k = 1, 2, 3$:

$$\rho_{02} = J(J - 2q^2)\left[q(q^2 - 2J)\right]^{-1} > 0,$$
$$\alpha_{021} = -30°, \quad \alpha_{022} = 120° - 30°,$$
$$\alpha_{023} = 240° - 30°;$$

3) *при любых положительных значениях параметров* (J, q) *имеется множество особых точек* (ρ_{03}, α_{03}): $\rho_{03} = 0$, $\alpha_{03} \in [0, 2\pi]$;

4) *при любых положительных значениях параметров* (J, q) *имеется множество особых точек* (ρ_{04}, α_{04}): $\rho_{04} = +\infty$, $\alpha_{04} \in [0, 2\pi]$.

Утверждение 2. 1. *Все особые точки типов* 3) *и* 4) *из утверждения* 1 *являются вырожденными: одно из собственных значений матрицы Пуанкаре в любой из этих точек равно нулю.* 2. *Матрица Пуанкаре в любой из точек типов* 3) *и* 4) *утверждения* 1 *имеет вид* $A = \mathrm{diag}(a_{11}, 0)$ *и, кроме того,* $a_{11} < 0$ *при* $q^2 < J/2$, $a_{11} > 0$ *при* $q^2 > J/2$ *(для точек типа 3)),* $a_{11} < 0$ *при* $q^2 > 2J$, $a_{11} > 0$ *при* $q^2 < 2J$ *(для точек типа* 4)).

Утверждение 3. 1. *Особые точки типа* 1) *и* 2) *из утверждения* 1 *являются неустойчивыми: одно из собственных значений матрицы Пуанкаре в любой из этих точек является вещественным и положительным, а другое — вещественным и отрицательным* ("*седло*"). 2. *Матрица Пуанкаре в любой из точек типа* 1) *или* 2) *утверждения* 1 *имеет вид* $A = \left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^2$, $a_{12} = 0$, *причем* $a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$ *для точек типа* 1), $a_{11} < 0, a_{22} > 0$ *для точек типа* 2).

Определение 1. 1. Движение тела со скольжением всех трёх точек опоры называется регулярным. 2. Вращательное движение тела вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр масс, называется центрально-вращательным. 3. Вращательное движение тела вокруг вертикальной оси, проходящей через его точку опоры, называется опорно-вращательным.

Утверждение 4. 1. *Если* $0 < q^2 < J/2$, *то финальное движение тела является либо центрально-вращательным (регулярным), либо опорно-вращательным* (*нерегулярным*). 2. *Если* $q^2 \in (J/2, 2J)$, *то финальное движение тела является только опорно-вращательным* (*нерегулярным*). 3. *Если* $q^2 > 2J$, *то финальное движение тела является либо опорно-вращательным (нерегулярным), либо поступательным* (*регулярным*).

Замечание. Из утверждения 4 следует, что финальное движение тела типа пластины может быть регулярным (со скольжением всех трёх точек) только центрально-вращательным или поступательным. Кроме того, как правило, финальное движение является нерегулярным и представляет собой вращение вокруг одной из опор. Это подтверждается и соответствующими аналитическими результатами, полученными в работах автора [4, 5]. В частности, в [1, 4, 5], при специальных условиях $h = 0$, $\rho_0 = q$, $J = q^2$ были получены интегралы движения $\rho(t) = q = \mathrm{const}$, $\sqrt{\omega}\left|\omega^2 + F(\alpha)\right| = H_0 = \mathrm{const} \neq 0$, где $F(\alpha)$ — ограниченная периодическая функция. Из приведённых интегралов следует, что движение со скольжением всех трёх точек опоры не может являться финальным, когда $\omega = 0$, так как в противном

случае было бы $H_0 = 0$. На это было ранее указано в работах автора [1, 4, 5]. Результат утверждения 4 не совпадает с соответствующими результатами численного исследования аналогичной задачи, полученными в работе [6], в которой в качестве финальных рассматривались лишь регулярные движения.

Утверждение 5. 1. *При движении тела вектор скорости его центра масс может отклоняться как в сторону вращения тела, так и против вращения тела по ходу его движения.* 2. *Если* $q^2 \in (J/2, 2J)$, *то движение заканчивается только вращением вокруг одной из опор тела в сторону начального вращения.* 3. *Если* $q^2 \notin (J/2, 2J)$, *то финальные движения могут быть либо опорно-вращательными, либо центрально-вращательными, либо поступательными.*

Замечание. Результат п. 1 утверждения 5 противоречит результатам работы [6], в которой численно было получено, что вектор скорости центра масс в аналогичной задаче всегда во время движения отклоняется в сторону, противоположную вращению тела по ходу его движения.

ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ $h \neq 0$

Пусть $h \neq 0$, т.е. центр масс тела возвышается над опорной плоскостью. Результаты этого пункта основаны на следующем предположении.

Предположение финального равновесия. Пусть движение тела завершается его полной остановкой в момент $t = t^*$. Тогда при $t \to t^* - 0$ для соответствующих уравнений движения реализуются равновесные нормальные реакции в точках опоры.

Таким образом, предельные (для момента остановки) нормальные реакции являются такими же, как и при равновесии тела. Правдоподобность высказанного предположения следует из таких рассуждений. Если при остановке тела в момент $t = t^*$ в результате какого-либо его безотрывного движения реализуются неравновесные нормальные реакции, то либо полная остановка не осуществляется, либо невозможно состояние равновесия тела (нарушаются односторонние связи в точках контакта или тело переворачивается). Для обоснования этих утверждений используются следующие факты: нормальные реакции при движении не могут мгновенно менять своих значений; нормальные реакции при равновесии не зависят от реализующихся (в момент остановки тела) сил трения покоя в опорах. В рассматриваемом симметричном случае равновесные нормальные реакции одинаковы и каждая равна $g/3$.

Определение 2. Особая точка (ρ, α) системы (9) называется равновесной, если нормальные реакции опор в этой точке, определяемые из последних трёх уравнений системы (7), являются равновесными (т.е. обеспечивают статическое состояние равновесия тела при каких-либо допустимых силах трения покоя в опорах).

Утверждение 6. *При* $h \neq 0$ *система* (9) *не имеет равновесных особых точек, если* $\rho \in (0, +\infty]$.

Для точки $\rho = 0$ (соответствующей центрально-вращательному движению) справедливо следующее.

Утверждение 7. *Точка* $\rho = 0$ *(для любого* α*) является особой точкой первого уравнения системы* (9). *Причем, согласно* (7), *все нормальные реакции* N_k *принимают равновесные значения, равные* $g/3$. *Эта точка асимптотически устойчива, если* $J > 2(q^2 + f^2h^2)$, *и неустойчива, если* $J < 2(q^2 + f^2h^2)$. Кроме того, $\alpha(\tau) \to -\infty$, *если* $\tau \to +\infty$.

Итог полученных результатов содержится в следующем утверждении.

Утверждение 8. *Пусть* $\rho(0) \neq 0$, $\rho(0) \neq +\infty$. *Тогда, если* $J > 2(\varepsilon^2 + q^2)$, *то финальное движение тела может быть либо центрально-вращательным, либо опорно-вращательным, а если* $J < 2(\varepsilon^2 + q^2)$, *то финальное движение тела может быть только опорно-вращательным.*

Замечание. Результат утверждения 8 не совпадает с результатами работы [6], в которой в качестве финальных движений тела численно рассматривались только движения со скольжением всех трёх точек опоры, отличные от центрально-вращательных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: Кн. дом “ЛИБРОКОМ”, 2011. 208 с.
2. *Журавлёв В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. В. 5. С. 762–767.
3. *Журавлёв В.Ф.* Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–88.
4. *Розенблат Г.М.* Об интегрировании уравнений движения тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками // ДАН. 2010. Т. 435. № 4. С. 475–478.
5. *Розенблат Г.М.* О движении тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками // ПММ. 2011. Т. 75. В. 2. С. 261–265.
6. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Ердакова Н.Н.* Dynamics of a Body Sliding on a Rough Plane and Supported at Three Points // Theor. and Appl. Mech. 2016. V. 43. Iss. 2. P. 169–190. DOI: 10.2298/TAM161130013B